美しさの比率

〈要約〉
黄金比で成り立つ関係を、白銀比、青銅比でも成り立つのかを研究したところ、成り立つことが分かった。さらに、この3つの比率の間にある規則性も発見することができた。

研究の目的
昔からある比を改めて詳しく調べ、身の回りの数学の知識を得る。

研究内容
①フィボナッチ数列の一般項を簡単な形であらわす
②漸化式の初期値の値による変化
③黄金比らの規則性を調べて一般化することはできるか

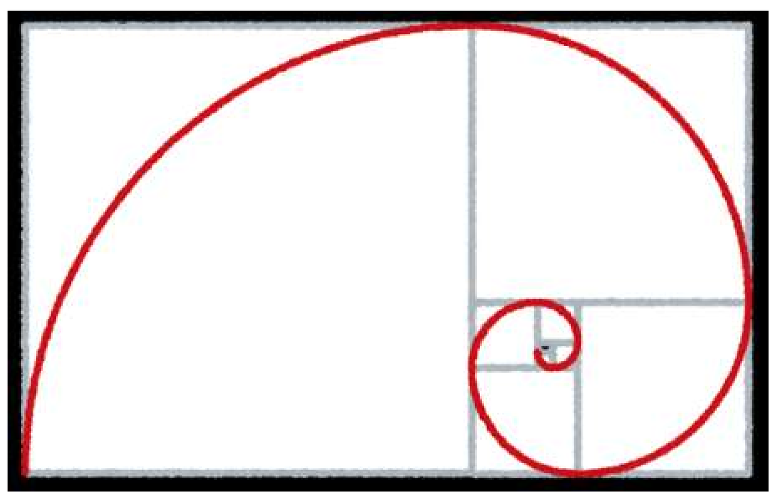
引用文献
「雪月花の数学」著　桜井進

～研究結果～

・黄金比は1 : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の比のこと

・白銀比は$1:(1+\sqrt{2})$の比のこと

・青銅比は1 : $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$の比のこと



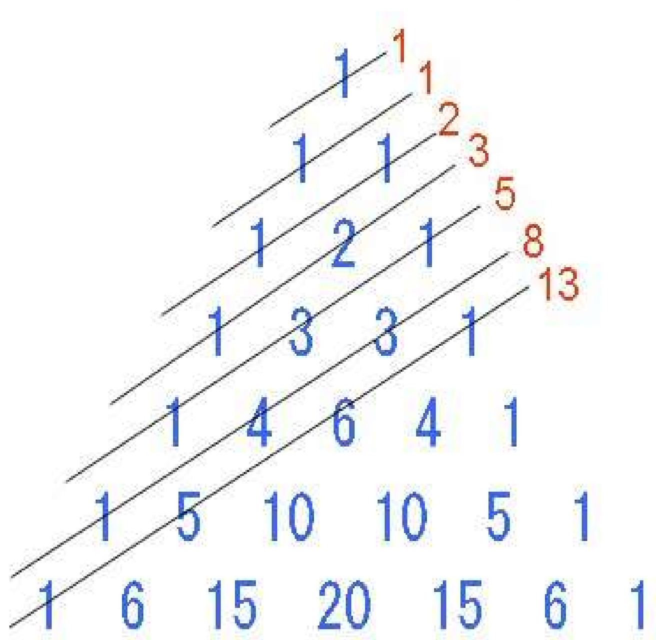
～フィボナッチ数列の一般項～

1, 2, 3, 5, 8, 13、、、

$a_1=1, a_2=1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ (n=1,2,3...)

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$
$$x^2=x+1$$
$$x^2-x-1=0$$
$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$
$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

～パスカルの三角形～



～フィボナッチ数列の一般化～

1=${}_0C_0$
1=${}_1C_0$
2=${}_2C_0$＋${}_1C_1$
3＝${}_3C_0$＋${}_2C_1$
5＝${}_4C_0$＋${}_3C_1$＋${}_2C_2$
8＝${}_5C_0$＋${}_4C_1$＋${}_3C_2$
13＝${}_6C_0$＋${}_5C_1$＋${}_4C_2$＋${}_3C_3$
（n＝1, 2, 3,……）

～黄金関数$f(x)$と$f'(x)$で囲まれた面積S～

$$x^2-x-1=0$$
$$f(x)=x^2-x-1$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$
$$f'(x)=2x-1$$

$0\leqq x\leqq 3$の区間では

$$S=\int_0^3\{-(2x-1)-(x^2-x-1)\}\,dx$$
$$=\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}$$

～貴金属関数$f(x)$と$f'(x)$で囲まれた面積S～

$$f(x)=x^2-\mathrm{n}x-1$$
$$f'(x)=2x-\mathrm{n}$$
$$x^2-\mathrm{n}x-1=2x-\mathrm{n}$$
$$x^2-\mathrm{n}x-2x-1+\mathrm{n}=0$$
$$x=\frac{n+2\pm\sqrt{(-n-2)^2-4(-1+n)}}{2}$$
$$=\frac{n+2\pm\sqrt{n^2+8}}{2}$$
$$\mathrm{S}=\frac{1}{6}\left(\frac{n+2+\sqrt{n^2+8}}{2}-\frac{n-2-\sqrt{n^2+8}}{2}\right)^3$$
$$=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2\sqrt{n^2+8}}{2}\right)^3$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{8\times(n^2+8)\times\sqrt{n^2+8}}{8}$$
$$\mathbf{S}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\times(\boldsymbol{n^2}+\mathbf{8})\times\sqrt{\boldsymbol{n^2}+\mathbf{8}}$$

～漸化式における収束の速さ～

例として白銀比の数列の漸化式を扱う

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$$

この式に代入する初期値の違いにより、白銀数がどのように変わるか調べた。