

2章 2節 命題と論証

発展「すべて」と「ある」

「思い込み」を防ぐために有効な視点

「日本で生まれた人は日本人」これは真？

そうとは限らない

「傾向が強い」と「正しい」は違う

「すべての実数 x について $x^2 + 1 > 0$ 」は真の命題

実際

$$0^2 + 1 = 1, 1^2 + 1 = 2, 2^2 + 1 = 5, \dots$$

$$(-1)^2 + 1 = 2, \dots$$

「すべての実数 x について $x^2 - 1 > 0$ 」は？

$$x = 2, 3, 4, 5, \dots, (-2), (-3), (-4), \dots$$

ほとんどの数で $x^2 - 1 > 0$ は成り立つが

いくつかの数 ($-1 \leq x \leq 1$) では成り立たない

成り立たない例 (=反例) が1つでもあれば, 命題は「偽」

「ある実数 x について $x^2 - 1 > 0$ 」

この言い方は変

言い換えると

「 $x^2 - 1 > 0$ を満たす, ある実数 x がある」

あるね $x=2$ とか

※ 「すべての x について $p(x)$ が成り立つ」 が偽になるのは
「 $p(x)$ が成り立たない, ある x がある」

つまり

「ある x について $\overline{p(x)}$ 」

※ 「ある x について $p(x)$ が成り立つ」 が偽になるのは
「 どんな x についても $p(x)$ が成り立たない」

つまり

「すべての x について $\overline{p(x)}$ 」

※ 「すべての」 「ある」 を含む命題の否定は
「すべての」と「ある」が入れ替わる