2　論証

命題の逆・裏・対偶

「 $p \Rightarrow q$ 」に対して

逆：「 $q \Rightarrow p$ 」 左右入れ替え

裏：「 $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ 」 左右そのままで否定

対偶：「 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ 」 逆の裏（裏の逆）　という

※元の命題「$p \Rightarrow q$」と対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」の真偽は一致する

（ので，どちらを証明してもよい　後でやります）

※命題が直接証明するのが難しいとき，対偶を考える

例10

「$x=2 \Rightarrow x^2=4$」について

逆：「$x^2=4 \Rightarrow x=2$」　左右入れ替え

裏：「$x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$」　左右そのままで否定

対偶：「$x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$」　逆の裏（裏の逆）

※逆：「 $x^2=4 \Rightarrow x=2$ 」

２乗して
４になる数は

２しかない？

裏：「 $x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$ 」

２以外の数は
どれでも全部

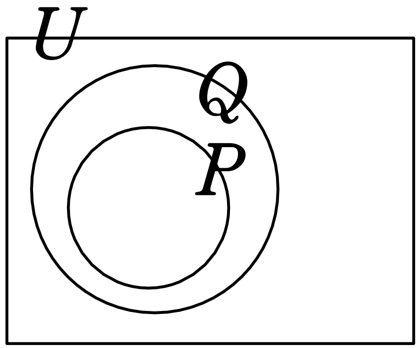
２乗して
４にならない？

対偶：「 $x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$ 」？

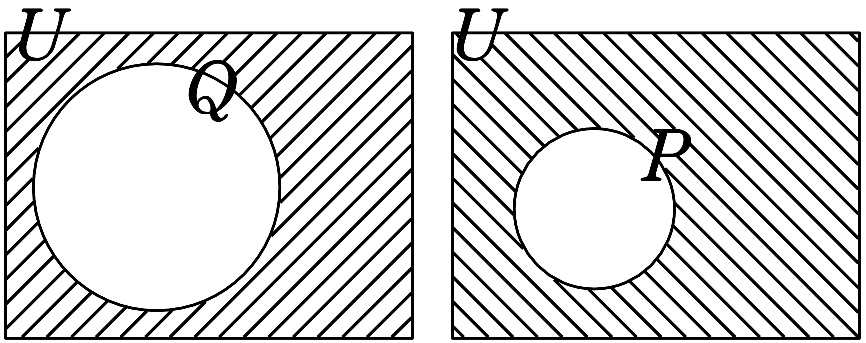
真？　偽？

対偶を利用する証明法

※ $P \subset Q$ のとき $\overline{Q} \subset \overline{P}$ が成り立つ



Q の外側　　P の外側



よって

「 $p \Rightarrow q$ 」が真なら，対偶「 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ 」も真になる

逆に

「 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ 」が真なら，その対偶「 $p \Rightarrow q$ 」も真になる

Ｐ６２例10の上をＣＨＥＣＫ

例11

「 $x+y \neq 5 \Rightarrow x \neq 2$ または $y \neq 3$ 」

足して５にならないときは

x は２ではないか，　y は３ではない…？

対偶は

「 $x=2$ かつ $y=3 \Rightarrow x+y=5$」

Ｐ６１ド・モルガン

$2+3=5$ よりこの命題は真。よって、元の命題も真

※「または」は場合分けを考える必要があり，扱いにくい

ド・モルガンの法則で「かつ」に変えると，扱いやすくなる

対偶を使うのはこんな時①です

例題1

nは整数とする。「n^2が偶数なら，nは偶数である」

$n^2=2k$ と書ける

$n=\sqrt{n^2}=\sqrt{2k}$ …？

証明

対偶は「nが奇数なら，n^2は奇数である」

これが証明できればよい

n が奇数だとすると，ある整数 k を用いて， $n=2k+1$ と

「3」は2＋1　「5」は2×2＋1　「7」は2×3＋1

表される。このとき

$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$

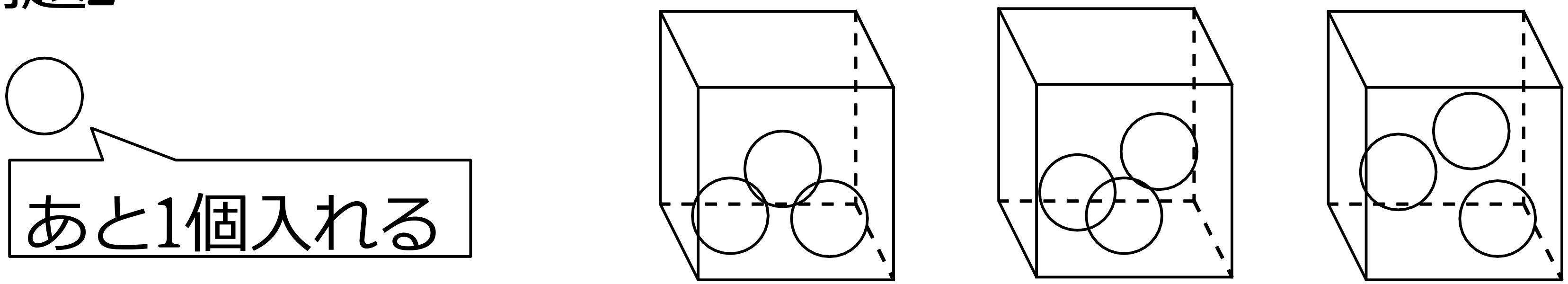
ここで， $2k^2+2k$ は整数なので　$2(2k^2+2k)+1$　は奇数

よって n^2 も奇数である。対偶が真なので元の命題も真である

背理法

「それが違うとすると…おかしくね？」という考え方

例題2



ということですが…

それを証明するとなると，教科書の解答のようになる

応用例題3

$\sqrt{2}$ が無理数でない（$\sqrt{2}$ は有理数，つまり分数ということ）

とすると矛盾が起きる　ということを示す

証明

$\sqrt{2}$ が無理数でないとすると，$\sqrt{2}$ は有理数で

$\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$ …①　（m,n は１以外の公約数を持たない自然数）

$\dfrac{2}{3}$ とか。$\dfrac{4}{6}$ は×

と書ける。このとき

$\sqrt{2}\,n=m$　両辺２乗して　$2n^2=m^2$ …②

よって m^2 は偶数であり，m も偶数になる

Ｐ６３例題1

よって，ある自然数 k を用いて　$m=2k$ と書ける

これを②に代入して

$2n^2=(2k)^2$　計算して整理すると　$n^2=2k^2$　となり

n^2 は偶数であり，n も偶数になる

以上より，m も n も偶数となって

１以外の公約数を持たないことに矛盾する

よって，$\sqrt{2}$ は有理数でなく，無理数である