

2章 2節 命題と論証

「2章1節集合」は数Aと同じ内容です

1 命題と条件

命題と条件 値を代入すると真偽が定まる文や式

正しいかどうか定まる文や式

ちなみに「 $x^3 + y^3 = z^3$ を満たす正の整数の組

例1

(x, y, z) は存在しない」ことが知られています

(1) 「 $3^2 + 4^2 = 5^2$ 」は真の命題

(2) 「7は偶数」は偽の命題

人による

(3) 「正三角形は直角2等辺三角形より美しい」は命題でない

例2

$2x - 8 < 0$ を普通に解くと

$$2x < 8$$

$$x < 4 \quad \text{ですが...}$$

命題としては

条件「 $2x - 8 < 0$ 」が真となる x の範囲は「 $x < 4$ 」

と理解（意味付け）できる

命題「 $p \Rightarrow q$ 」
「 p (仮定) ならば q (結論)」と読みます

例3

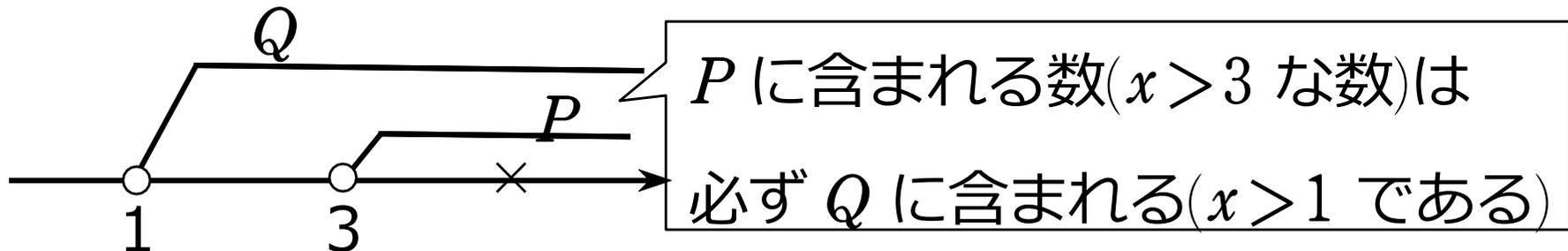
「 $x > 3 \Rightarrow x > 1$ 」

3より大きい数は「どれも、絶対」
1より大きい? と考える

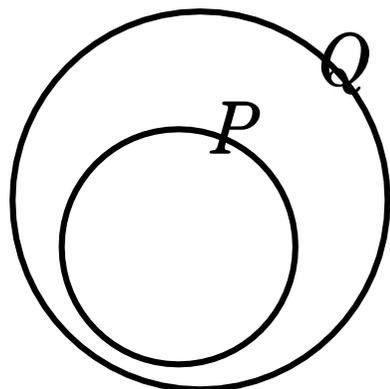
この命題は真

集合で見ると...

$$P = \{x \mid x > 3\}, \quad Q = \{x \mid x > 1\}$$



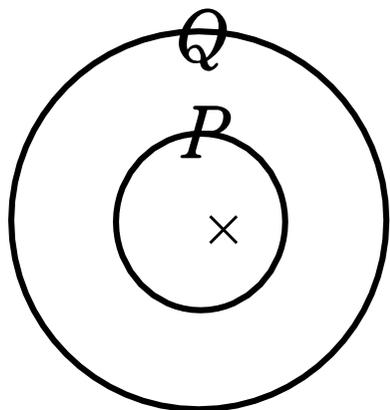
※集合を使った「命題の真偽」の判定法



$P \subset Q$ (P は Q に含まれる)のとき

$p \Rightarrow q$ は真の命題

※「的当て」で理解①



P のエリアに当たっていれば

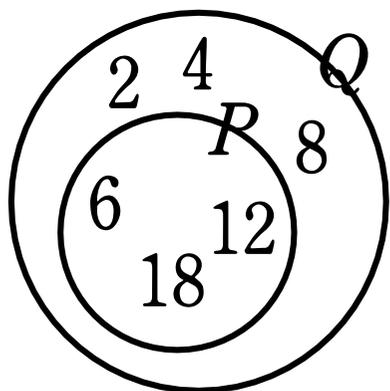
「必ず」 Q には当たっている ので

「 P ならば Q 」は真

※ $P=Q$ のとき「 $p \Rightarrow q$ 」も「 $q \Rightarrow p$ 」も真になる
「 $p \Leftrightarrow q$ 」と書く

例4

p : n は6の倍数, q : n は偶数 とすると



$P \subset Q$ であり「 $p \Rightarrow q$ 」は真

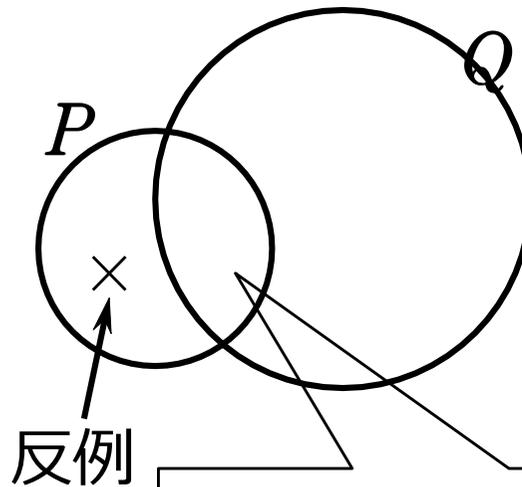
「 $q \Rightarrow p$ 」 「 $p \Leftrightarrow q$ 」は成り立たない (=偽)

※例えば「8」は Qに入っているが, Pには入っていない

このとき「 $q \Rightarrow p$ 」は偽

※反例

p なのに q でない例
これが1つでもあれば
「 $p \Rightarrow q$ 」は偽



「 p であって q である」ものが
あっても「反例」があれば偽

※命題が「真」というのは結構厳しいこと！

ほとんどがO.Kであっても、たった1つでも「反例」があれば
その命題は「偽」になる

※命題の真偽の判断は

「本当に？」 「絶対？」 「全部？」 と考える

例 「 $x^2=1 \Rightarrow x=1$ 」 の真偽は？

2乗して1になる数は？

1しかない？

例5

「 $x^2=4 \Rightarrow x=2$ 」 は, 反例 「 $x=-2$ 」 があるので 偽

2乗して4になる数は？

2しかない？